บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นสร้างฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามลบ – ลินเลย์วางนัยทั่วไป และศึกษาคุณสมบัติเชิงคณิตศาสตร์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไป พร้อมทั้งเปรียบเทียบการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปโดยใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีโมเมนต์ และได้ศึกษาการประยุกต์ใช้ข้อมูลไม่ต่อเนื่องสำหรับการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปในเชิงประยุกต์ จากผลการศึกษาสรุปผลและข้อเสนอแนะดังนี้

สรุปผลการศึกษา

ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$f(x;r,\alpha,\theta,\gamma)=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^j\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta+r+j+\gamma}{\theta+\gamma} \quad ,$$

x=0,1,2,..., r, α , θ , γ > 0

คุณสมบัติสถิติเชิงคณิตศาสตร์

1) แฟกทอเรียลโมเมนต์ (Factorial Moments) อันดับที่ k

$$\mu_{[k]}(\mathrm{X})=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j\left(\frac{\theta}{\theta-(k-j)}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta-(k-j)+\gamma}{\theta+\gamma}, k=1,2,\ldots,\mathrm{r},\theta,\alpha,\gamma>0$$

2) โมเมนต์อันดับที่ 1 ถึง 4

- โมเมนต์อันดับที่ 1 (First Moment)
-

$$E(\mathrm{X})=r\,\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-1+\gamma}{(\theta-1)^{\alpha+1}}-\frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right] \text{ โดยที่ } \theta>1$$

- โมเมนต์อันดับที่ 2 (Second Moment)

$$E(\mathrm{X}^2) = r(r+1)\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-2+\gamma}{(\theta-2)^{\alpha+1}} - \frac{2(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}} + \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right] \text{ โดยที่ } \theta > 2$$

- โมเมนต์อันดับที่ 3 (Third Moment)

$$E(\mathrm{X}^3) = r(r+1)(\mathrm{r}+2)\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-3+\gamma}{(\theta-3)^{\alpha+1}} - \frac{3(\theta-2+\gamma)}{(\theta-2)^{\alpha+1}} + \frac{3(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}} - \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right]$$

โดยที่ $\theta > 3$

- โมเมนต์อันดับที่ 4 (Fourth Moment)

$$E(\mathrm{X}^4) = r(r+1)(\mathrm{r}+2)(\mathrm{r}+3)\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-4+\gamma}{(\theta-4)^{\alpha+1}} - \frac{4(\theta-3+\gamma)}{(\theta-3)^{\alpha+1}} + \frac{6(\theta-2+\gamma)}{(\theta-2)^{\alpha+1}} - \frac{4(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}} - \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right]$$

โดยที่ $\theta > 4$

3) ค่าเฉลี่ย (Mean)

$$\boldsymbol{Mean} = \boldsymbol{E}(\mathrm{X}) = r\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-1+\gamma}{(\theta-1)^{\alpha+1}} - \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right] \text{ โดยที่ } \theta > 1$$

4) ความแปรปรวน (Variance)

$$Var(X) = \frac{\delta_3}{\delta_1}\left(r^2+r\right) - \frac{\delta_2}{\delta_1}\left(2r - \frac{r^2\delta_2}{\delta_1}\right) + r$$

โดยที่ $\delta_1 = \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}$, $\delta_2 = \frac{(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}}$, $\delta_3 = \frac{\theta-2+\gamma}{(\theta-2)^{\alpha+1}}$ และ $\theta > 2$

5) ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (Coefficient of Skewness)

$$Skewness(X) = \frac{E(X^3) - 3E(X)Var(X) - \left[E(X)\right]^3}{\left[Var\left(X\right)\right]^{3/2}}$$ โดยที่ $\theta > 3$

6) ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (Coefficient of Kurtosis)

$$Kurtosis(X) = \frac{E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)\left[E(X)\right]^2 - 3\left[E(X)\right]^4}{\left[Var\left(X\right)\right]^2}$$

โดยที่ $\theta > 4$

7) ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด (Moment Generation Function)

$$M_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \binom{r+x-1}{x} \sum_{j=0}^{x} \left[\binom{x}{j} (-1)^j \left(\frac{\theta}{\theta + r + j} \right)^{\alpha+1} \frac{\theta + r + j + \gamma}{\theta + \gamma} \right],$$

r, α , θ , γ > 0

8) ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (Characteristic Function)

$$\varphi_X(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} \binom{r+x-1}{x} \sum_{j=0}^{x} \left[\binom{x}{j} (-1)^j \left(\frac{\theta}{\theta + r + j} \right)^{\alpha+1} \frac{\theta + r + j + \gamma}{\theta + \gamma} \right],$$

r, α , θ , γ > 0

การประมาณค่าพารามิเตอร์

จากการจำลองสถานการณ์เพื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามลบ - ลินเลย์ทั่วไปโดยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธีคือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีโมเมนต์ ในการศึกษาครั้งนี้ได้จำลองข้อมูลตามสถานการณ์ที่กำหนดโดยใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 50,100,200 และ 500 โดยทำการจำลองซ้ำ 500 ครั้ง พบว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์ $r, \theta, \alpha, \gamma$ ด้วยวิธีโมเมนต์จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่างเกือบทุกกรณี และเมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่างเกือบทุกกรณี

การประยุกต์ข้อมูลจริง

จากการนำเอาข้อมูลจริง โดยเป็นข้อมูลอุบัติเหตุบนถนนทางหลวงของจังหวัดนครปฐม ปี 2555 โดยทดสอบภาวะสารรูปสนิทดีโดยใช้ตัวสถิติทดสอบไคสแควร์ พบว่า ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะจากผลการศึกษา

จากการศึกษาพบว่าเมื่อข้อมูลที่นำมาศึกษามี การแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วย วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีโมเมนต์ โดยพบว่าวิธีโมเมนต์ ให้ประสิทธิภาพ ดีกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เกือบทุกกรณี แต่วิธีโมเมนต์มีข้อเสียคือ ค่าประมาณพารามิเตอร์ของ θ จะหาค่าได้เมื่อ $\theta > 4$ ดังนั้นบางกรณีควรใช้วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดใน การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรศึกษาคุณสมบัติสถิติเชิงคณิตศาสตร์อื่นๆ ที่เกี่ยวกับการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป
2. เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป ด้วยวิธีภาวะควรจะเป็นสูงสุด และวิธีโมเมนต์โดยใช้เกณฑ์พิจารณาอื่นๆ เช่น AIC, BIC เป็นต้น
3. ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยอื่น ๆ ได้แก่ วิธีเบส์เซียน (Bayesian Method)