บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การศึกษาวิจัยครั้งนี้เพื่อพัฒนาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามลบ-ลินเลย์และการประยุกต์ โดยมีผลการวิเคราะห์ดังต่อไปนี้

ผลการวิเคราะห์คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไป ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันความน่าจะเป็น

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ X ~NB-GL(r, α ,θ ,γ) แล้วฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$f(x;r,\alpha,\theta,\gamma)=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta+r+j+\gamma}{\theta+\gamma} \ ,$$

x=0,1,2,..., r,α ,θ ,γ > 0

พิสูจน์ ถ้าให้ $X\,|\,\lambda \sim NB(r,p=\exp(-\lambda))$ และ $\lambda \sim GL(\alpha,\theta,\gamma)$ แล้ว

$$f(x;\mathrm{r},\alpha,\theta,\gamma)=\int_{0}^{\infty}\Pr(X=x\,|\,\lambda)\,f(\lambda;\alpha,\theta,\gamma) \qquad (1)$$

โดยที่ Pr(X=x|λ) มีค่าดังนี้

$$\Pr(X=x|\lambda) = \binom{r+x-1}{x}e^{-\lambda r}(1-e^{-\lambda})^{x}$$

$$= \binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}e^{-\lambda(r+j)} \qquad (2)$$

นำสมการ (2) แทนในสมการ (1) จะได้

$$\Pr(X=x|\lambda) = \binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda(r+j)}f(\lambda;\alpha,\theta,\gamma)$$

$$= \binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}M_{\lambda}(-(r+j)) \qquad (3)$$

เมื่อนำ $-(r+j)$ แทนในฟังก์ชันโมเมนต์เวียนกำเนิดของการแจกแจงลินเลย์ทั่วไป แล้วแทนในสมการ (3) จะได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป ดังนี้

$$f(x;r,\alpha,\theta,\gamma)=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta+r+j+\gamma}{\theta+\gamma}$$

บทแทรก 4.1 กำหนดให้ $\alpha=1,\ \gamma=1$ ในฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปแล้ว ได้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ เป็นดังนี้

$$f(x;r,\theta)=\frac{\theta^{2}}{\theta+1}\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\frac{\theta+r+j+1}{\left(\theta+r+j\right)^{2}},x=0,1,2,\ldots,r,\theta>0$$

พิสูจน์ ถ้าให้ $X\,|\,\lambda \sim NB(r,p=\exp(-\lambda))$ และ $\lambda \sim GL(\alpha=1,\theta,\gamma=1)$ แล้ว

$$\begin{aligned}
f(x;r,\theta)&=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{1+1}\frac{\theta+r+j+1}{\theta+1}\\
&=\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{2}\frac{\theta+r+j+1}{\theta+1}\\
&=\frac{\theta^{2}}{\theta+1}\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\binom{x}{j}(-1)^{j}\frac{\theta+r+j+1}{\left(\theta+r+j\right)^{2}}
\end{aligned}$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสม

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ X ~NB-GL(r, α , θ , γ) แล้วฟังก์ชันความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$\mathrm{F}(x;r,\alpha,\theta,\gamma)=\sum_{i=0}^{x}\binom{r+i-1}{i}\sum_{j=0}^{i}\left[\binom{i}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta+r+j+\gamma}{\theta+\gamma}\right],$$

r, α , θ , γ > 0

คุณสมบัติสถิติเชิงคณิตศาสตร์ซึ่งประกอบไปด้วย

1) แฟกทอเรียลโมเมนต์ (Factorial Moments) อันดับที่ k

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ X ~NB-GL(r, α ,θ ,γ) แล้วแฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ k ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปเป็นดังนี้

$$\mu_{[k]}(\mathrm{X})=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta-(k-j)}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta-(k-j)+\gamma}{\theta+\gamma},k=1,2,\ldots,\mathrm{r},\theta,\alpha,\gamma>0$$

พิสูจน์ ถ้าให้ $X\,|\,\lambda \sim NB(r,p=\exp(-\lambda))$ และ $\lambda \sim GL(\alpha,\theta,\gamma)$ แล้วแฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ k ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไป เป็นดังนี้

$$\begin{aligned}\mu_{[k]}(\mathrm{X})&=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}E_{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)^{k}\\&=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}E_{\lambda}\left(e^{\lambda}-1\right)^{k}\\&=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}M_{\lambda}\left(k-j\right)\end{aligned}\qquad(4)$$

เมื่อนำ $k-j$ แทนในฟังก์ชันโมเมนต์เวียนกำเนิดของการแจกแจงลินเลย์ทั่วไป แล้วนำมาแทนสมการ (4) จะได้แฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ k ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไป ดังนี้

$$\mu_{[k]}(\mathrm{X})=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}\left(\frac{\theta}{\theta-(k-j)}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta-(k-j)+\gamma}{\theta+\gamma}$$

บทแทรก 4.2 กำหนดให้ $\alpha=1,\ \gamma=1$ ในแฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ k ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไปแล้ว ได้แล้วแฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ k ของการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ เป็นดังนี้

$$\mu_{[k]}(\mathrm{X})=\frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^{j}\frac{\theta^{2}}{\theta+1}\frac{(\theta-(k-j)+1)}{(\theta-(k-j))^{2}}k=1,2,\ldots,\mathrm{r},\theta>0$$

พิสูจน์ ถ้าให้ $X \mid \lambda \sim NB(r, p=\exp(-\lambda))$ และ $\lambda \sim GL(\alpha=1, \theta, \gamma=1)$ แล้วแฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ k เป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
\mu_{[k]}(\mathrm{X}) &= \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(\frac{\theta}{\theta-(k-j)} \right)^{1+1} \frac{\theta-(k-j)+1}{\theta+1} \\
&= \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \left(\frac{\theta}{\theta-(k-j)} \right)^{2} \frac{\theta-(k-j)+1}{\theta+1} \\
&= \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r)} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j \frac{\theta^2}{\theta+1} \frac{(\theta-(k-j)+1)}{(\theta-(k-j))^2}
\end{aligned}
$$

2) โมเมนต์อันดับที่ 1 ถึง 4

เมื่อหาแฟกทอเรียลโมเมนต์อันดับที่ 1 ถึง 4 ของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ได้แล้ว สามารถนำมาหาค่าโมเมนต์อันที่ 1 ถึง 4 ได้ดังนี้

- โมเมนต์อันดับที่ 1 (First Moment)
-

$$E(\mathrm{X}) = r\left[\left(\frac{\theta}{\theta-1} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{\theta-1+\gamma}{\theta+\gamma} \right) - 1 \right]$$

หรือ

$$E(\mathrm{X}) = r\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-1+\gamma}{(\theta-1)^{\alpha+1}} - \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}} \right] \text{ โดยที่ } \theta > 1$$

- โมเมนต์อันดับที่ 2 (Second Moment)
-

$$E(\mathrm{X}^2) = r(r+1)\left[\left(\frac{\theta}{\theta-2} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{\theta-2+\gamma}{\theta+\gamma} \right) - 2\left(\frac{\theta}{\theta-1} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{\theta-1+\gamma}{\theta+\gamma} \right) + 1 \right]$$

หรือ

$$E(\mathrm{X}^2) = r(r+1)\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-2+\gamma}{(\theta-2)^{\alpha+1}} - \frac{2(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}} + \frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}} \right] \text{ โดยที่ } \theta > 2$$

- โมเมนต์อันดับที่ 3 (Third Moment)

-

$$E(X^3)=r(r+1)(r+2)\left[\left(\frac{\theta}{\theta-3}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-3+\gamma}{\theta+\gamma}\right)-3\left(\frac{\theta}{\theta-2}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-2+\gamma}{\theta+\gamma}\right)\right.$$
$$\left.+3\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-1+\gamma}{\theta+\gamma}\right)-1\right]$$

หรือ

$$E(X^3)=r(r+1)(r+2)\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-3+\gamma}{(\theta-3)^{\alpha+1}}-\frac{3(\theta-2+\gamma)}{(\theta-2)^{\alpha+1}}+\frac{3(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}}-\frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right]$$

โดยที่ $\theta>3$

- โมเมนต์อันดับที่ 4 (Fourth Moment)

$$E(X^4)=r(r+1)(r+2)(r+3)\left[\left(\frac{\theta}{\theta-4}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-4+\gamma}{\theta+\gamma}\right)-4\left(\frac{\theta}{\theta-3}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-3+\gamma}{\theta+\gamma}\right)\right.$$
$$\left.+6\left(\frac{\theta}{\theta-2}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-2+\gamma}{\theta+\gamma}\right)-4\left(\frac{\theta}{\theta-1}\right)^{\alpha+1}\left(\frac{\theta-1+\gamma}{\theta+\gamma}\right)+1\right]$$

หรือ

$$E(X^4)=r(r+1)(r+2)(r+3)\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-4+\gamma}{(\theta-4)^{\alpha+1}}-\frac{4(\theta-3+\gamma)}{(\theta-3)^{\alpha+1}}+\frac{6(\theta-2+\gamma)}{(\theta-2)^{\alpha+1}}-\frac{4(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}}-\frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right]$$

โดยที่ $\theta>4$

3) ค่าเฉลี่ย (Mean)

$$Mean=E(X)=r\frac{\theta^{\alpha+1}}{\theta+\gamma}\left[\frac{\theta-1+\gamma}{(\theta-1)^{\alpha+1}}-\frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}\right]$$ โดยที่ $\theta>1$

4) ความแปรปรวน (Variance)

$$Var(X)=\frac{\delta_3}{\delta_1}\left(r^2+r\right)-\frac{\delta_2}{\delta_1}\left(2r-\frac{r^2\delta_2}{\delta_1}\right)+r$$

โดยที่ $\delta_1=\frac{\theta+\gamma}{\theta^{\alpha+1}}$, $\delta_2=\frac{(\theta-1+\gamma)}{(\theta-1)^{\alpha+1}}$, $\delta_3=\frac{\theta-2+\gamma}{(\theta-2)^{\alpha+1}}$ และ $\theta>2$

5) ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (Coefficient of Skewness)

$$Skewness(X)=\frac{E(X^3)-3E(X)Var(X)-\left[E(X)\right]^3}{\left[Var\left(X\right)\right]^{3/2}} \text{ โดยที่ } \theta>3$$

6) ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (Coefficient of Kurtosis)

$$Kurtosis(X)=\frac{E(X^4)-4E(X^3)E(X)+6E(X^2)\left[E(X)\right]^2-3\left[E(X)\right]^4}{\left[Var\left(X\right)\right]^2}$$

โดยที่ $\theta>4$

7) ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด (Moment Generation Function)

จากการศึกษาฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด สามารถหารูปแบบฟังก์ชันได้ผลดังนี้

$$M_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{tx}\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\left[\binom{x}{j}(-1)^j\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta+r+j+\gamma}{\theta+\gamma}\right],$$

r, α , θ , γ > 0

8) ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (Characteristic Function)

จากการศึกษาฟังก์ชันลักษณะเฉพาะสามารถหารูปแบบฟังก์ชันได้ผลดังนี้

$$\varphi_X(t)=\sum_{x=0}^{\infty}e^{itx}\binom{r+x-1}{x}\sum_{j=0}^{x}\left[\binom{x}{j}(-1)^j\left(\frac{\theta}{\theta+r+j}\right)^{\alpha+1}\frac{\theta+r+j+\gamma}{\theta+\gamma}\right],$$

r, α , θ , γ > 0

การสร้างค่าตัวแปรสุ่มทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไป

การสร้างตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ที่มีการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ r , θ, α และ γ สามารถทำได้ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ λ ~ GL(α , θ , γ) นั่นคือกำหนดให้ λ มีการแจกแจงลินเลย์ทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ θ, α และ γ

ขั้นที่ 2 แทนค่า λ ลงในสูตรสร้างค่าตัวแปรสุ่มทวินามลบดังต่อไปนี้

X_i = rnbinom(1,size=r,prob=exp(-lambda))

เมื่อ i = $1,2,3,\ldots,n$

จากสูตรข้างต้นจะทำให้ได้ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ r , θ, α และ γ ซึ่งสามารถสร้างตัวแปรสุ่มได้โดยการเขียนคำสั่งโปรแกรม R ได้ผลดังนี้

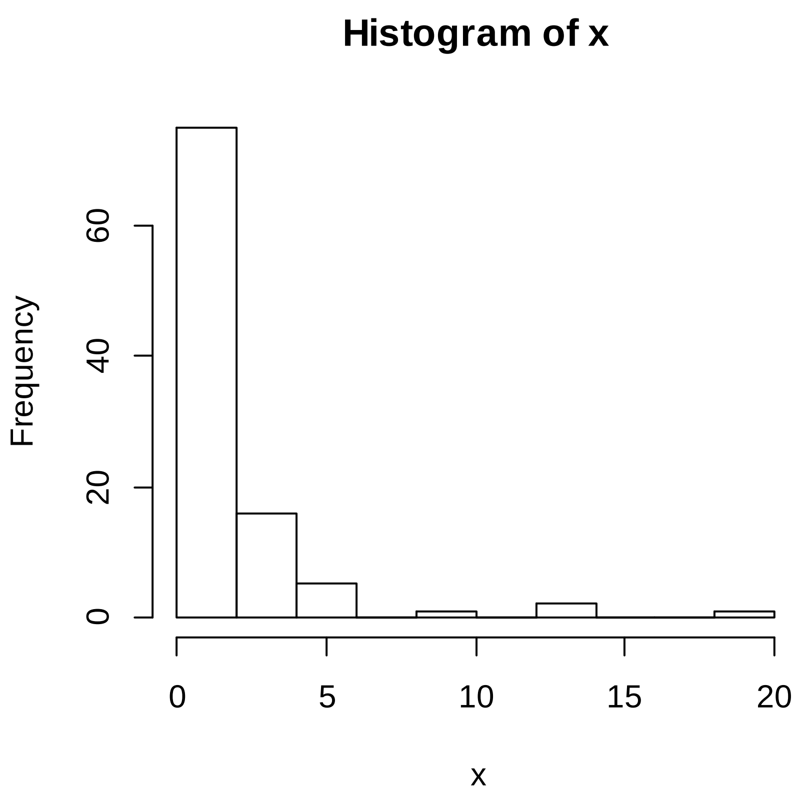
คำสั่งโปรแกรม R สำหรับการสร้างตัวแปรสุ่มทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป เมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ $r=2$, $\theta=4, \alpha=2$ และ $\gamma=3$ และ ขนาดตัวอย่าง (n) = 100 ดังนี้

```
rbetaexp<-function(n,a,b,lambda){
x<-rep(0,n)
rnbgl<-function(n,r,theta,alpha,gamma)
{
   rglindley<-function(n,theta,alpha,gamma)
  {
  x<-rep(0,n)
  for(i in 1:n){
    u<-runif(1)
    v1<-rgamma(1,shape=alpha,rate = theta)
    v2<-rgamma(1,shape=alpha+1,rate = theta)
    w<-theta/(theta+gamma)
    if(u<=w){x[i]=v1} else
      if(u>w){x[i]=v2}
    sample<-x
             }
sample
  }

lambda<-rglindley(n,theta,alpha,gamma)
y<-rnbinom(n,size=r,prob=exp(-lambda))
sample<-y
}

x=rnbgl(100,2,4,2,3)
```

จากคำสั่งข้างต้นได้ค่าตัวแปสุ่มทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ $r=2$, $\theta=4, \alpha=2$, $\gamma=3$ และ n =100 ดังนี้

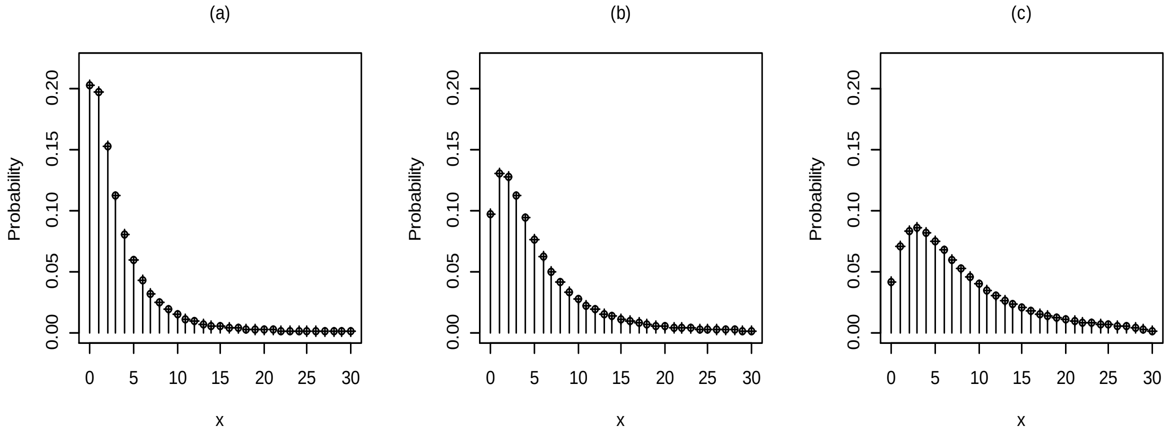
0	4	2	3	0	0	3	0	0	0
0	3	0	0	0	3	0	2	3	0
0	0	2	4	2	0	0	1	0	1
6	13	2	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0	1	1	1	5
0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
3	0	2	9	0	0	0	0	0	0
2	4	14	0	20	0	0	3	0	1
3	1	2	0	6	1	4	3	5	3
0	0	5	0	0	1	0	4	3	0

จากค่าตัวแปรสุ่มสามารถวาดกราฟได้ผลดังนี้

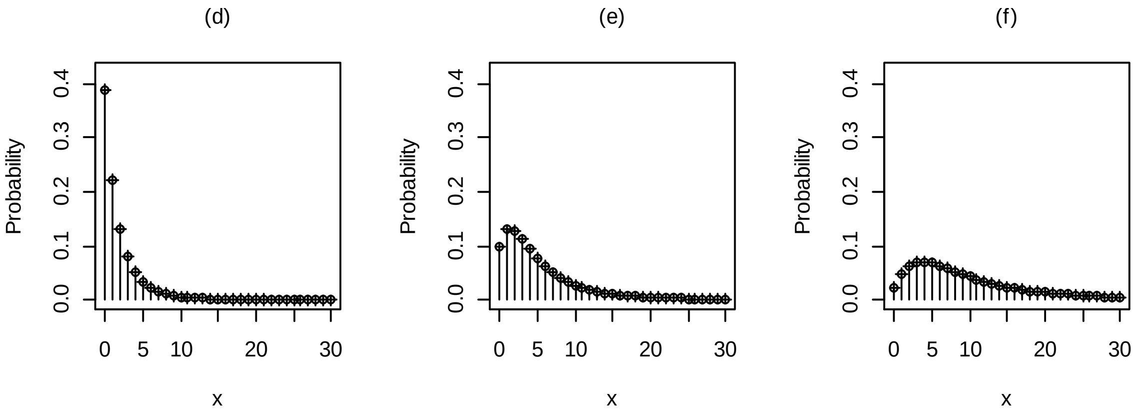


ภาพที่ 1 ฮิสโตแกรมแสดงค่าตัวแปรสุ่มทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป เมื่อ $r=2$, $\theta=4, \alpha=2$, $\gamma=3$ และ n =100

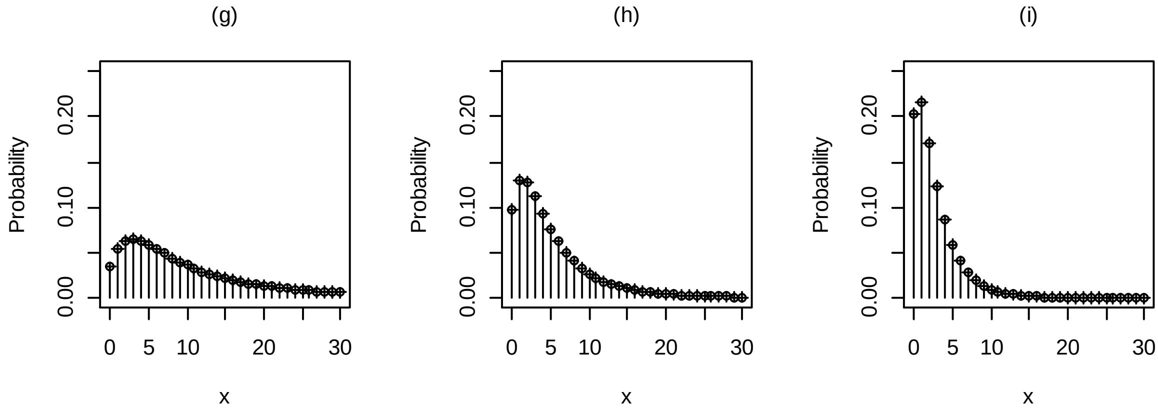
จากการศึกษาลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป เป็นดังภาพที่ 2 - 5



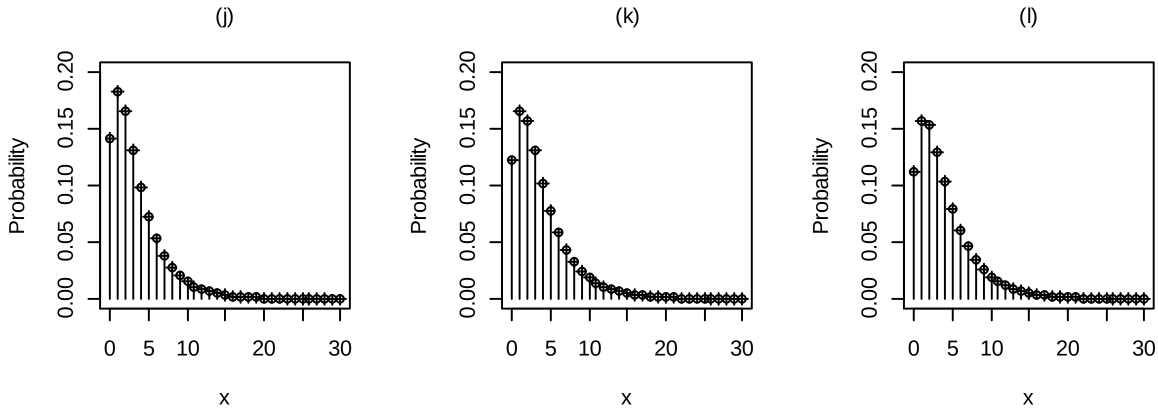
ภาพที่ 2 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป โดย รูป (a) $r=3,\theta=3,\alpha=5,\gamma=4$ รูป (b) $r=5,\theta=3,\alpha=5,\gamma=4$ และ รูป (c) $r=8,\theta=3,\alpha=5,\gamma=4$



ภาพที่ 3 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป โดย รูป (d) $r=5,\theta=1,\alpha=5,\gamma=4$ รูป (e) $r=5,\theta=3,\alpha=5,\gamma=4$ และ รูป (f) $r=5,\theta=5,\alpha=5,\gamma=4$



ภาพที่ 4 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป โดย รูป (g) $r=5,\theta=3,\alpha=3,\gamma=4$ รูป (h) $r=5,\theta=3,\alpha=5,\gamma=4$ และ รูป (i) $r=5,\theta=3,\alpha=8,\gamma=4$



ภาพที่ 5 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป โดย รูป (j) $r=5,\theta=4,\alpha=8,\gamma=0.2$ รูป (k) $r=5,\theta=4,\alpha=8,\gamma=5$ และ รูป (l) $r=5,\theta=4,\alpha=8,\gamma=10$

ผลการวิเคราะห์การประมาณค่าพารามิเตอร์

ผลการวิเคราะห์การประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไปโดยวิธิการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธีคือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีโมเมนต์ ในการศึกษาครั้งนี้ได้จำลองข้อมูลตามสถานการณ์ที่กำหนดโดยใช้โปรแกรม R ของแต่ละขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 50,100,200 และ 500 โดยทำการจำลองซ้ำ 500 ครั้ง และกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้

1) $r = 1, \theta = 5, \alpha = 2, \gamma = 4$
2) $r = 3, \theta = 6, \alpha = 2, \gamma = 5$
3) $r = 5, \theta = 8, \alpha = 1, \gamma = 9$

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีโมเมนต์ และได้เปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองระหว่างค่าประมาณกับค่าจริง (Mean Square Error:MSE) ได้ผลดังตารางที่ 1 – 3 ดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีโมเมนต์ (MM) สำหรับการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $r=1,\theta=5,\alpha=2,\gamma=4$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ $(parameter)$	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	MM	MLE	MM
50	r	9.92	19.82	1060.71	1666.86
	θ	0.92	11.83	18.78	68.33
	α	31.61	3.73	3278.54	228.42
	γ	9.17	10.26	171.07	227.69
100	r	9.38	17.78	892.24	1448.78
	θ	1.02	10.51	16.39	51.25
	α	22.98	3.63	1850.53	118.39
	γ	6.22	6.61	84.95	94.47
200	r	8.93	7.45	220.38	201.17
	θ	1.03	9.98	16.12	45.59
	α	12.72	2.76	347.92	84.15
	γ	3.78	3.74	26.77	31.12
500	r	5.41	3.60	90.51	81.09
	θ	1.03	9.19	15.96	27.41
	α	7.81	2.33	106.09	47.34
	γ	2.23	2.06	7.27	10.28

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด

จากตารางที่ 1 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ MM ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ r,θ,α,γ ของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป เมื่อกำหนด $r=1,\theta=5,\alpha=2,\gamma=4$ พบว่า การประมาณค่าพารามิเตอร์ r ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MM เมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 50 และ 100 แต่เมื่อมีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 และ 500 พบว่า วิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MLE ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MM เมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 50 และ 100 และ วิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE เมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 200 และ 500

การประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MM ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MLE ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MM ทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ α ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ γ ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MM ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MLE ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MM ทุกขนาดตัวอย่าง

ตารางที่ 2 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีโมเมนต์ (MM) สำหรับแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $r=3,\theta=6,\alpha=2,\gamma=5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	**พารามิเตอร์** $(parameter)$	**ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ**		MSE	
		MLE	MM	MLE	MM
50	r	18.04	5.09	1279.81	14.99
	θ	10118.52	14.90	6.04E+08	411.42
	α	8367.51	8.03	4.11E+08	253.66
	γ	972.26	1.39	6.05E+06	222.49
100	r	5.04	4.62	161.37	12.51
	θ	11207.77	12.54	7.02E+08	238.14
	α	10076.05	6.55	5.65E+08	130.53
	γ	874.78	2.17	5.7E+06	167.96
200	r	3.08	4.50	9.47	10.02
	θ	6923.17	10.36	4.44E+08	33.66
	α	6529.70	4.21	3.86E+08	14.59
	γ	689.12	3.28	4.67E+06	64.05
500	r	2.19	4.11	4.69	5.49
	θ	612.76	9.96	1.67E+07	29.18
	α	587.32	4.76	1.52E+07	18.84
	γ	84.41	3.96	2.67E+05	39.33

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด

จากตารางที่ 2 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ MM ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ $r, \theta, \alpha, \gamma$ ของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป เมื่อกำหนด $r = 3, \theta = 6, \alpha = 2, \gamma = 5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ r ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE เมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 50 และ 100 แต่เมื่อมีขนาดตัวอย่างเท่ากับ 200 และ 500 พบว่า วิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MM เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE เมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 50 และ 100 และ วิธี MLE ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MM เมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 200 และ 500

การประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ α ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ γ ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีโมเมนต์ (MM) สำหรับการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $r=5,\theta=8,\alpha=1,\gamma=9$

ขนาดตัวอย่าง (n)	**พารามิเตอร์** $(parameter)$	**ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ**		MSE	
		MLE	MM	MLE	MM
50	r	22.80	5.36	2024.58	28.87
	θ	13859.83	22.44	1.15E+09	677.68
	α	13047.85	9.03	1.04E+09	290.78
	γ	585.89	11.85	2.01E+06	777.04
100	r	10.24	5.25	544.94	12.22
	θ	16585.61	14.80	1.11E+09	84.33
	α	20640.67	4.30	1.73E+09	16.26
	γ	743.23	10.61	2.16E+06	685.44
200	r	7.40	5.15	13.53	8.13
	θ	12861.60	11.99	1.15E+09	27.54
	α	14234.17	3.34	1.36E+09	9.65
	γ	330.41	10.04	7.26E+05	625.81
500	r	7.20	5.31	12.61	7.59
	θ	7031.81	11.14	4.57E+08	19.33
	α	8583.00	2.84	6.96E+08	6.05
	γ	444.13	9.98	2.25E+06	520.07

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด

จากตารางที่ 3 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ MM ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ r,θ,α,γ ของการแจกแจงทวินามลบ -ลินเลย์ทั่วไป เมื่อกำหนด $r=5,\theta=8,\alpha=1,\gamma=9$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ r ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ θ ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE

จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ α ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ γ ด้วยวิธี MM จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MM ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE ทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจริงกับการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์วางนัยทั่วไป

การประยุกต์ข้อมูลจริงกับการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป ได้นำเสนอการประยุกต์ใช้ข้อมูลอุบัติเหตุบนถนนทางหลวงของจังหวัดนครปฐม ปี 2555 (กรมขนส่งทางบก, 2556) ซึ่งได้นำมาจากการเก็บรวบรวมข้อมูลจำนวนผู้เสียชีวิตจากการเกิดอุบัติเหตุบนถนนทางหลวงของจังหวัดนครปฐม ได้ผลการวิเคราะห์ดังตารางที่ 4

จากตารางที่ 4 พบว่า ข้อมูลอุบัติเหตุบนถนนทางหลวางของจังหวัดนครปฐม ปี 2555 โดยทดสอบภาวะสารรูปสนิทดี โดยใช้ตัวสถิติทดสอบไคสแควร์ พบว่า ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

ตารางที่ 4 แสดงการประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลอุบัติเหตุบนถนนทางหลวงของจังหวัดนครปฐม ปี 2555 สำหรับการแจกแจงปัวซง ทวินามลบ และทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป

จำนวนผู้เสียชีวิต	ความถี่	การแจกแจง		
		ปัวซง	ทวินามลบ	ทวินามลบ-ลินเลย์ทั่วไป
0	969	854.36	894.86	968.44
1	241	358.17	249.98	245.15
2	81	86.82	103.58	76.68
3	33		47.56	28.29
4	8		22.91	11.81
5	2	14.66	11.35	5.41
6	2		5.72	
7	3		6.07	6.18
8+	3			
parameters		$\hat{\lambda} =$ 0.4508	$\hat{r} = 0.5087$ $\hat{p} = 0.4508$	$\hat{r} = 1.2668$ $\hat{\theta} = 1.8942$ $\hat{\alpha} = 6.8071$ $\hat{\gamma} = 0.12954$
Chi squares		154.9207	35.656	4.609
degrees of freedom		2	5	2
p-value		<1%	<1%	9.98%